Problema 1: Fie G un grup în care elementele sunt funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, în care operaţia este compunerea funcţiilor.

a) Arătaţi că dacă toate funcţiile din G sunt derivabile, atunci G este subgrup în grupul bijecţiilor lui $\mathbb{R}$ sau G este format dintr-o singură funcţie constantă.

b) Daţi exemplu de un astfel de grup G care să conţină cel puţin o funcţie nederivabilă.

Problema 2: Fie A un inel cu $0 \neq 1$. Presupunem că $U(A)$ a elementelor inversabile este finită şi are loc implicaţia

$$x \in U(A) \setminus \{-1\} \Rightarrow 1 + x \in U(A).$$

Arătaţi că:

i) Inelul A nu are elemente nilpotente nenule, adică :

$$x^k = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (x \in A,\ k \in \mathbb{N}^*).$$

ii) Mulţimea $K = U(A) \cup \{0\}$ împreună cu operaţiile inelului este un corp.

Problema 3: Fie $f : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact. Presupunem că funcţia $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$G(x) = \int_0^x |f(t)|dt$$

este mărginită.

Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$ există şi este finită.